ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1984

MATHEMATIQUES I

(3 pages dactylographiées)

TA

Toutes les fonctions utilisées sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

Première Partie

On étudie dans cette partie l'équation différentielle

(L) $\qquad z' + z + x^2 = 0$

I.1. Etablir que, pour tout λ réel, (L) admet une solution sur $\mathbb{R}$ et une seule, que l'on notera f_λ, qui satisfasse à la condition $f_\lambda(0) = \lambda - 2$ et déterminer explicitement $f_\lambda(x)$.

I.2. Démontrer que, pour $\lambda \leqslant 0$, l'équation $f_\lambda(x) = 0$ n'a pas de solution et que, pour $\lambda > 0$, elle possède une solution unique qu'on notera $r(\lambda)$.

I.3. On a défini dans la question précédente une application r de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$: $\lambda \longmapsto r(\lambda)$.

Montrer que r est une fonction continue et donner son tableau de variations. En quels points est-elle dérivable ? Etablir que, lorsque λ tend vers $+\infty$ et lorsque λ tend vers zéro, $r(\lambda)$ est équivalent à $\operatorname{Log}\lambda$ (le symbole Log désignant le logarithme népérien).

I.4. Etudier les variations de f_λ ; on donnera le tableau de variations correspondant à chacun des cas rencontrés (on ne cherchera pas à donner une expression explicite des zéros de f'_λ, mais on discutera leur nombre et leur position par rapport à 0 et 1).

I.5. On désigne par C_λ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé.

a) Etudier les branches infinies de C_λ.

b) Donner sur un même graphique l'allure des courbes C_{-1}, C_0, C_1, C_2, C_3.

I.6. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble K des points des C_λ où la tangente est parallèle à Ox.

Deuxième Partie

On étudie dans cette partie l'équation différentielle :

(B) $\qquad y' = y + x^2 y^2$

II.1. Dans cette question et la suivante, on désigne par J un intervalle non vide et non réduit à un point et par φ une application dérivable de J dans $\mathbb{R}$ qui soit solution de (B) dans J et ne soit pas identiquement nulle dans J.

a) Etablir que φ' est continue dans J.

b) Etudier le sens de variation de la fonction qui à tout $x \in J$ associe $e^{-x}\varphi(x)$. Qu'en résulte-t-il pour l'ensemble (Z) des zéros de φ ?

.../...

c) On suppose, ici seulement, qu'il existe $x_0 \in J$ tel que $\varphi(x_0) \leqslant 0$ et $x_1 \in J$ tel que $\varphi(x_1) > 0$. Etablir l'existence d'un $b \in J$ tel que

$$\varphi(b) = 0 \quad \text{et} : \quad \forall x \in J \cap]\, b, +\infty\, [\ , \ \varphi(x) > 0.$$

En étudiant la nature de l'intégrale

$$\int_b^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\, dt$$

aboutir à une contradiction.

d) Etablir de même qu'il ne peut exister de couple $(x_2\ ,\ x_3)$ de points de J tels que $\varphi(x_2) < 0$ et $\varphi(x_3) \geqslant 0$.

e) En déduire que φ ne s'annule pas dans J.

II.2. On pose alors $\psi = \frac{1}{\varphi}$. Déterminer une équation différentielle simple vérifiée par ψ.

II.3. Déterminer toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient l'équation différentielle (B).

Donner dans un repère orthonormé la représentation graphique d'une telle solution.

II.4. Etablir que, pour tout a réel, il existe une application unique de $]a, +\infty\ [$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant, l'équation différentielle (B) dans $]a, +\infty\ [$ et tendant vers l'infini lorsque x tend vers a. Donner son expression explicite et l'allure de sa représentation graphique (on distinguera selon le signe de a).

Troisième Partie

On désigne par g l'application de $[0, +\infty\ [$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \geqslant 0$ par

$$g(x) = -x^2 + 2x - 1 + e^{-x}$$

III.1. Exprimer, pour $x \geqslant 0$, g (x) en fonction de $f_1(x)$ et $f_1(0)$. Donner le tableau de variations de g et tracer dans un repère orthonormé la courbe d'équation $y = g(x)$.

III.2. a) Encadrer par deux entiers consécutifs l'unique zéro strictement positif de g.

b) Donner un développement limité d'ordre 2 de g (x) quand x tend vers zéro.

c) Etablir que, pour tout $x > 0$, l'on a :

$$g(x) < x - \frac{x^2}{2}$$

III.3. On étudie dans toute la suite la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = g(u_n)$.

.../...

Etablir que u_n existe pour tout n et que cette suite est strictement décroissante ; donner sa limite. Quelle est, lorsque n tend vers $+\infty$, la limite de

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \ ?$$

III.4. On considère la série entière

$$u_0 + u_1 x + \ldots + u_n x^n + \ldots$$

a) Donner son rayon de convergence.

b) Etudier la nature de la série pour $x = -1$.

c) Etablir l'équivalence, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\text{Log} \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim -\frac{1}{2} \ u_n$$

Quelle est la nature de la suite de terme général Log u_n ? Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

III.5. a) Démontrer, pour tout $x \in]0,1]$, l'inégalité :

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$$

b) En déduire que, l'on a pour tout entier n :

$$u_n \leqslant \frac{2}{n+2}$$

III.6. a) Etablir, pour tout $x \in]0,1[$, l'inégalité

$$g(x) > 2 + 2x - \frac{4}{2-x}$$

(On pourra par exemple comparer les développements en série entière des deux membres). En déduire une majoration de

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{x} \ .$$

b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$$

(On utilisera III.5.b.)

c) Etablir l'existence de constantes A et B telles que, pour tout entier n,

$$u_n \geqslant \frac{2}{n + A \ \text{Log} \ n + B}$$

et donner explicitement un couple (A, B).

III.7. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.